

Απειροστικός ΙΙΙ – Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

$$\iiint_B x^2 dV, \quad \iiint_B e^{-xy} y dV, \quad \iiint_B z e^{x+y} dV, \quad B = [0, 1]^3, \quad dV = dx dy dz.$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz) dz dy dx, \quad \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} dz dy dx, \quad \int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx, \quad \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^x \sin x dz dy dx$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που φράσσεται από την επιφάνεια $x^2 + 2y^2 = 2$ και τα επίπεδα $z = 0$, $x + y + 2z = 2$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που φράσσεται από τα επίπεδα $x = y$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $x + y + z = 0$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_W (1 - z^2) dx dy dz,$$

όπου το χωρίο W είναι η πυραμίδα με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$.

Άσκηση 6. Γράψτε το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ στην μορφή

$$\iiint_W f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx,$$

για τα διαφορετικά χωρία:

(i) $W = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$

(ii) $W = \{(x, y, z) : \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(iii) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

(iv) $W = \{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, z \geq 0 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.